山 东 大 学

二〇一八年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651 科目名称 数学分析

（答案必须写在答题纸上，写在试题上无效）

一、计算题。（每题 15 分，共 30 分）

1. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$，其中 $a>0, ac-b^2>0$.

2. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}([\frac{2n}{k}]-2[\frac{n}{k}])$.

二、计算与证明题。（每题 20 分，共 60 分）

1. 已知函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}\frac{e^x+e^{-x}}{e^\pi+e^{-\pi}}$.

（1）在 $[-\pi,\pi]$ 上将 $f(x)$ 展为傅里叶级数；

（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和。

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $|g'(x)|<f'(x)$，$x\in(a,+\infty)$.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ 也存在。

3. 设 $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos(x+\frac{k}{n})$，$n=1,2\cdots$，证明：$\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

三、证明题。（每题 20 分，共 60 分）

1. 设 $p(x)$ 是一多项式，若对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$p'''(x)-p''(x)-p'(x)+p(x)\geq 0,$$

证明：$p(x)\geq 0$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

2. 设函数 $f(u,v),g(u,v)$ 满足方程 $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v}$，$\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial g}{\partial u}$，函数 $w(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

证明：（1）函数 $h(u,v)=w(f(u,v),g(u,v))$ 满足方程 $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}=0$；

（2）$\frac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微，并且 $\int_0^{+\infty}f^2(x)dx<+\infty$. 如果 $|f'(x)|\leq C(x>0)$，其中 C 为一常数。试证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.